Université Paris-Diderot — Année 2018-2019
UDMT42 - Topologie Algébrique (31NU01MF) — M1 Maths

Interrogation écrite 2

4 Avril 2019

Durée : 100 minutes

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3$ privé de n demi-droites distinctes qui partent de l'origine.

Exercice 2. Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère, $N = (0,0,1)$ le pole nord, et $S = (0,0,-1)$ le pole sud. Soit $X = \mathbb{S}^2/\{N,S\}$.

(a) Construire le revêtement universel de X.

(b) Calculer le groupe fondamental de X.

Exercice 3. On considère le tore $X \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, plongé dans $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Considerons les deux relations d'équivance $\mathcal{R}_\varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{+,-\}$, engendrées par $(x,y,0) \sim (-x, \varepsilon y, 0)$ pour tout (x,y) tels que $x^2+y^2=1$.

(a) Calculer le groupe fondamental de $X/\mathcal{R}_+$.

(b) Calculer le groupe fondamental de $X/\mathcal{R}_-$.

Soit maintenant $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. On considère, $Y = X \cup D$ et $Y_\varepsilon = Y/\mathcal{R}_\varepsilon$ pour $\varepsilon \in \{+,-\}$.
(On dénote par $\mathcal{R}_\varepsilon$ à la fois les relations d'équivalence sur $\mathbb{R}^3$, et leur restrictions sur X et Y.)

(c) Calculer les groupes fondamentaux de Y, Y_+ et Y_-.

(d) Est-ce que Y, Y_+, Y_- sont homotopiquement équivalents ? Justifier la reponse.

(e) Montrer que Y, Y_+ et Y_- ne sont pas homéomorphes entre eux.